نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۰ دقیقه

نام آزمون: مثلثات

تاریخ آزمون: ۱۳۹۹/۰۸/۲۵

شهید بهشتی

۱ - اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی ۶۰ درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

① ۴۸ ② ۵۴ ③ ۶۴ ④ ۷۲

پاسخ: گزینه ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بینشان به‌دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 24 \times 3 = 72$$

۲ - حاصل عبارت $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2$ کدام است؟

① -2 ② 2 ③ -1 ④ صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\tan x + \cot x)^2 =$$

$$\frac{\sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} - (\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x})^2 =$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - (\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\sin x})$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 2 = -2$$

۳ - اگر α زاویه‌ای در دایره‌ی مثلثاتی، $\cot \alpha = \sqrt{\frac{m}{n} - 1}$ و $\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$ باشد، رابطه‌ی بین m و n کدام است؟ (عبارت‌ها تعریف شده‌اند.)

① $m = n^2$ ② $m = n^3$ ③ $n = m^3$ ④ $n = m^2$

پاسخ: گزینه ۳

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ 1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha} \end{array}}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

چون $\cos \alpha$ در مسئله بصورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - m^2} \xrightarrow{(\ )^2} 1 - \sin^2 \alpha = 1 - m^2 \Rightarrow \sin^2 \alpha = m^2$$

از طرفی: $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\sqrt{\dfrac{m}{n} - 1}\right)^2 = \dfrac{1}{m^2}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{m}{n} - 1 = \frac{1}{m^2} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{1}{m^2} \Rightarrow m^3 = n$$

۴ - اگر $A = \dfrac{\cot 30 - 2\sin 60 + \tan 45}{\tan^2 30 - \frac{1}{2}\cos 60 + \cot 45}$ باشد، حاصل $\dfrac{13A}{2}$ کدام است؟

① $\frac{12}{13}$ ② $\frac{13}{12}$ ③ 6 ④ $\frac{1}{6}$

پاسخ: گزینه ۳ $A=\dfrac{\sqrt{۳}-۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+۱}=\dfrac{\sqrt{۳}-\sqrt{۳}+۱}{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+۱}=\dfrac{۱}{\frac{۴-۳+۱۲}{۱۲}}=\dfrac{۱}{\frac{۱۳}{۱۲}}=\dfrac{۱۲}{۱۳}$

$A=\dfrac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow\dfrac{۱۳A}{۲}=\dfrac{۱۳}{۲}\times\dfrac{۱۲}{۱۳}=۶$

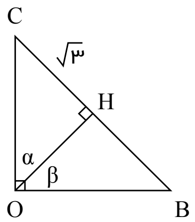
۵- مقدار ماکزیمم $|۵\sin x-۳|$ کدام است؟

① ۲ ② ۳ ③ π ④ ۸

پاسخ: گزینه ۴

$-۱\le\sin x\le ۱\to -۵\le ۵\sin x\le ۵$

$\xrightarrow{-۳} -۸\le ۵\sin x-۳\le ۲\to|۵\sin x-۳|\le ۸\Rightarrow Max=۸$



۶- اگر $BC=۳$ باشد، $(OC^{۲})$ کدام است؟

① $\sqrt{۳}$ ② ۳

③ $۳\sqrt{۳}$ ④ $\dfrac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ $\cos C$ را دو مثلث $O\overset{\Delta}{B}C$ و $O\overset{\Delta}{H}C$ می‌نویسیم:

$O\overset{\Delta}{B}C\ :\cos C=\dfrac{OC}{BC}$

$O\overset{\Delta}{H}C\ :\cos C=\dfrac{CH}{OC}$

$\cos C=\dfrac{CH}{OC}=\dfrac{OC}{BC}\Rightarrow OC^{۲}=BC\cdot CH$

$OC^{۲}=۳\times\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$

۷- اگر $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}$ باشد، حاصل عبارت $A=\sin^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta+\dfrac{۱}{۱+\cot^{۲}\theta}$ کدام است؟

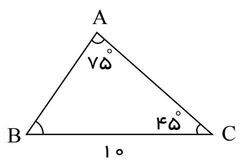
① $\dfrac{۵}{۸}$ ② $\dfrac{-۵}{۸}$ ③ $\dfrac{۷}{۸}$ ④ $\dfrac{-۷}{۸}$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{۱+\cot^{۲}\theta=\dfrac{۱}{\sin^{۲}\theta}}$

$A=\sin^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta+\dfrac{۱}{۱+\cot^{۲}\theta}=\sin^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta+\sin^{۲}\theta=۲\sin^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta$

$=۲\sin^{۲}\theta-(۱-\sin^{۲}\theta)=۲\sin^{۲}\theta-۱+\sin^{۲}\theta=۳\sin^{۲}\theta-۱$

$\xRightarrow{\sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۴}}۳\times\dfrac{۲}{۱۶}-۱=\dfrac{۶}{۱۶}-۱=\dfrac{-۱۰}{۱۶}=\dfrac{-۵}{۸}$



۸- در مثلث زیر طول ضلع AC کدام است؟

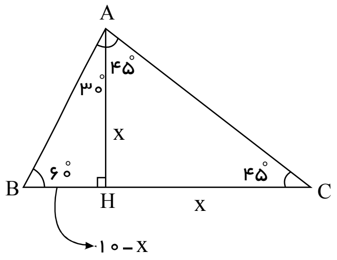
① $۵(\sqrt{۳}-۱)$ ② $۵(\sqrt{۳}+۱)$

③ $۵\sqrt{۶}(\sqrt{۳}-۱)$ ④ $۵\sqrt{۶}(\sqrt{۳}+۱)$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم:در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم: $\sin\alpha=\dfrac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}\ ,\ \tan\alpha=\dfrac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و CH را x می‌نامیم؛ واضح است که طول BH برابر با $۱۰-x$ خواهد بود. داریم.

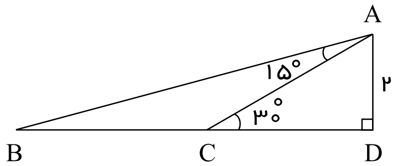


$$AH = CH = x$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱۰ - x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}+۳}{۳} = \frac{۱۰}{x} \Rightarrow x = \frac{۳۰}{۳+\sqrt{۳}} = ۵(۳-\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{۵(۳-\sqrt{۳})}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۵(۳\sqrt{۲}-\sqrt{۶}) = ۵(\sqrt{۱۸}-\sqrt{۶}) = ۵\sqrt{۶}(\sqrt{۳}-۱)$$

۹ - در شکل زیر، مساحت مثلث ABC کدام است؟



① $۴\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ② ۴

③ $۴\sqrt{۳}$ ④ $۴\tan ۱۵^\circ$

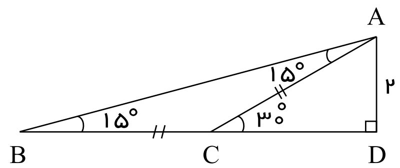
پاسخ: **گزینه ۲**

$$\overset{\triangle}{ADC}: \sin ۳۰^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

$$\overset{\triangle}{ADC}: C\widehat{A}D = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{ABD}: \widehat{B} = ۹۰^\circ - \widehat{A} = ۹۰^\circ - (۶۰^\circ + ۱۵^\circ) = ۱۵^\circ$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و شکل به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow AC = BC = ۴$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}BC \times AD = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۴$$

۱۰ - حاصل عبارت $\sin ۴۵ + \cos ۳۰ + \sqrt{۲}\sin ۹۰ + \tan ۶۰$ کدام است؟

① $\frac{۳\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}{۲}$ ② $\frac{۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}}{۲}$ ③ $\frac{۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}{۲}$ ④ $\frac{۲\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}{۲}$

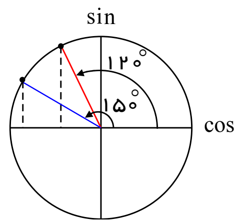
پاسخ: **گزینه ۱**

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \sqrt{۲} + \sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۱ - اگر $۱۲۰ \le \alpha \le ۱۵۰$ باشد و $\cos\alpha = ۲m - ۱$ باشد آنگاه حدود تغییرات m کدام است؟

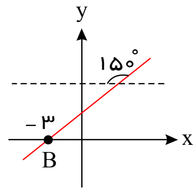
① $-۱ \le m \le ۱$ ② $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲} \le m \le \frac{۱}{۲}$ ③ $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{۱}{۴}$ ④ $\frac{۱-\sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳



$$۱۲۰^\circ \le \alpha \le ۱۵۰^\circ$$
$$\cos ۱۵۰ \le \cos\alpha \le \cos ۱۲۰$$
$$\frac{-\sqrt{۳}}{۲} \le \cos\alpha \le \frac{-۱}{۲}$$
$$\frac{-\sqrt{۳}}{۲} \le ۲m-۱ \le \frac{-۱}{۲}$$
$$\xrightarrow{+۱} \frac{۲-\sqrt{۳}}{۲} \le ۲m \le \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\div ۲} \frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \le m \le \frac{۱}{۴}$$

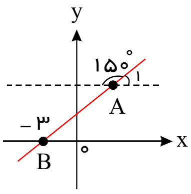
۱۲- اگر نمایش معادله‌ی خط $ax-\sqrt{۳}y+c=۰$ به صورت زیر باشد، حاصل $a.c$ کدام است؟



① ۱   ② $\sqrt{۳}$

③ ۳   ④ $۲\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به شکل داریم :



$$۱۵۰^\circ + \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۳۰^\circ$$
$$\Rightarrow \text{شیب خط} = m = \tan\hat{A}_۱ = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$y - y_B = m(x-x_B) \Rightarrow y - ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-(-۳))$$
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - y + \sqrt{۳} = ۰ \\ ax - \sqrt{۳}y + c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{۳}y + ۳ = ۰ \\ ax - \sqrt{۳}y + c = ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow a = ۱ \,,\, c = ۳ \Rightarrow a.c = ۳$$

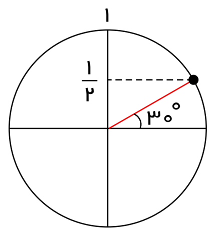
۱۳- اگر $۳۰^\circ < \alpha \le ۹۰^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{۲m-۱}{۴}$ باشد، حدود m کدام است؟

① $\frac{۳}{۲} < m < ۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ② $\frac{۳}{۲} \le m \le \frac{۵}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۲} < m \le \frac{۵}{۲}$ ④ $\frac{۱}{۲} < m \le ۱$

پاسخ: گزینه ۳

برای هر زاویهٔ α : $-۱ \le \sin\alpha \le ۱$ یعنی حداکثر سینوس آن ۱ و حداقل آن -۱ است.

وقتی α دربارهٔ $(۳۰^\circ, ۹۰^\circ]$ است، تغییرات آن محدودتر می‌شود. دایره را ببینید.



$$۳۰^\circ < \alpha \le ۹۰ \xrightarrow{\sin(\ )} \frac{۱}{۲} < \sin\alpha \le ۱$$
$$\xrightarrow{\sin\alpha = \frac{۲m-۱}{۴}} \frac{۱}{۲} < \frac{۲m-۱}{۴} \le ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۲ < ۲m - ۱ \le ۴$$
$$\xrightarrow{+۱} ۳ < ۲m \le ۵ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۳}{۲} < m \le \frac{۵}{۲}$$

۱۴- حاصل عبارت $A = \sin^۴\alpha + \cos^۴\alpha + (\sqrt{۲}\sin\alpha\cos\alpha)^۲$ همواره کدام است؟

① -۱ ② صفر   ③ ۱   ④ $۱ + \tan^۲\alpha$

پاسخ: گزینه ۳

برای هر زاویه‌ی x داریم : $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$

$$A = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$
$$\Rightarrow A = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ = ۱^۲ = ۱$$

۱۵- اگر نقطهٔ P انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α روی دایرهٔ مثلثاتی و $\tan\alpha = \frac{\sqrt{۶}}{۱۲}$ باشد، مختصات نقطهٔ P کدام می‌تواند باشد؟

① $(\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}, ۱)$
② $(\frac{۱}{۵}, \frac{۲\sqrt{۶}}{۵})$
③ $(۱, \frac{\sqrt{۶}}{۱۲})$
④ $(\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}, \frac{۱}{۵})$

پاسخ: گزینه ۴ در دایرهٔ مثلثاتی شعاع $r = ۱$ است و لذا مجموع مجذور طول و عرض هر نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی برابر یک می‌شود، یعنی $x^۲ + y^۲ = ۱$ در گزینهٔ «۱» و «۳» این حالت برقرار نیست پس یکی از گزینه‌های «۲» یا «۴» جواب است. از طرفی در دایرهٔ مثلثاتی اگر نقطهٔ (x_P و y_P) مختصات انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α باشد، آن‌گاه $\tan\alpha = \frac{y_P}{x_P}$ است. پس:

$$(\frac{۱}{۵}, \frac{۲\sqrt{۶}}{۵}) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}}{\frac{۱}{۵}} = ۲\sqrt{۶}$$ گزینهٔ «۲»: غ.ق.ق

$$(\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}, \frac{۱}{۵}) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۱۲} \checkmark$$ گزینهٔ «۴»:

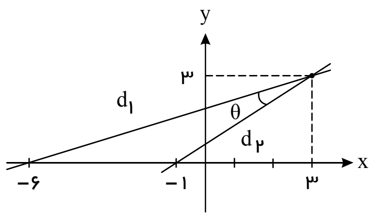
۱۶- حاصل عبارت $A = \frac{۱ + \tan^۲ ۶۰^\circ + \sin^۲ ۶۰^\circ}{\cot ۴۵^\circ + \cos^۲ ۳۰^\circ}$ کدام است؟

① $\frac{۱۹}{۷}$
② $\frac{۱ + ۲\sqrt{۳}}{۳}$
③ $\frac{۳ + ۲\sqrt{۳}}{۴}$
④ $\frac{۷}{۴}$

پاسخ: گزینه ۱ می دانیم: $\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$, $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\cot ۴۵^\circ = ۱$

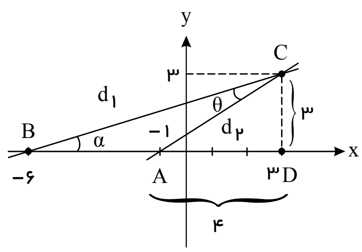
$$A = \frac{۱ + (\sqrt{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۱ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = \frac{۱ + ۳ + \frac{۳}{۴}}{۱ + \frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۴+۱۲+۳}{۴}}{\frac{۴+۳}{۴}} = \frac{۱۹}{۷}$$

۱۷- در شکل زیر، $\tan\theta$ چند برابر شیب خط $d_۱$ است؟ (زاویهٔ حادهٔ بین دو خط $d_۱$ و $d_۲$ است.)



① ۰٫۵
② ۱
③ $\sqrt{۳}$
④ $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲



$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲$

$\Rightarrow AC^۲ = ۱۶ + ۹ \Rightarrow AC^۲ = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$

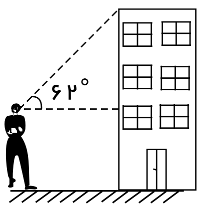
$AB = |-۶ - (-۱)| = ۵$

$AB = AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \theta = \alpha \Rightarrow \tan\theta = \tan\alpha$

شیب خط $d_۱$ برابر با $\tan\alpha$ است، پس $\tan\theta$ نیز برابر با شیب خط $d_۱$ است.

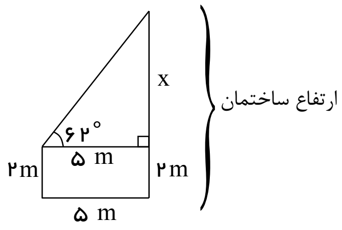
۱۸- مطابق شکل زیر، شخصی با قد $۲۰۰cm$ در فاصلهٔ افقی $۵m$ از یک ساختمان قرار دارد. اگر این شخص با زاویهٔ ۶۲° نسبت به افق، لبهٔ بالای ساختمان را ببیند، ارتفاع ساختمان چند متر است؟ $(\tan ۶۲^\circ \simeq ۲)$



① ۱۰
② ۱۲
③ ۷٫۵
④ ۴٫۵

پاسخ: گزینه ۲

شکل هندسی این مسئله به‌صورت روبه رو است:



اگر x را محاسبه کنیم، ارتفاع ساختمان به‌صورت $x+۲$ متر به‌دست خواهد آمد؛ از تانژانت ۶۲° که در مسئله داده شده شروع می‌کنیم:

$$\tan ۶۲^\circ \simeq ۲ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \frac{x}{۵} = ۲ \Rightarrow x = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

$$\text{ارتفاع ساختمان} = x + ۲ = ۱۰ + ۲ = ۱۲ \ \text{متر}$$

۱۹ـ حاصل عبارت $\frac{\sin ۸۹}{\cos ۸۹} \times \cdots \times \frac{\sin ۲}{\cos ۲} \times \frac{\sin ۱}{\cos ۱}$ کدام است؟!

① ۱ ② $\circ$ ③ -۱ ④ ∞

پاسخ: گزینه ۱

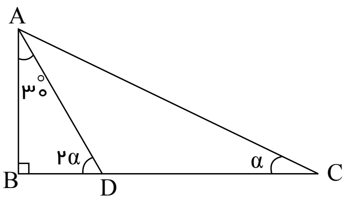
$$\boxed{\alpha + \beta = ۹۰ \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta}$$

می‌دانیم در ضرب خاصیت جابجایی وجود دارد؛

پس عبارت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sin ۱}{\cos ۸۹} \times \frac{\sin ۲}{\cos ۸۸} \times \cdots \times \frac{\sin ۸۹}{\cos ۱} \\ \sin ۱ = \cos ۸۹ \Rightarrow \frac{\sin ۱}{\cos ۸۹} = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ \times ۱ \times \cdots \times ۱ = ۱$$

۲۰ـ در شکل زیر، اگر $AD = DC$ باشد، حاصل $\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}$ کدام است؟



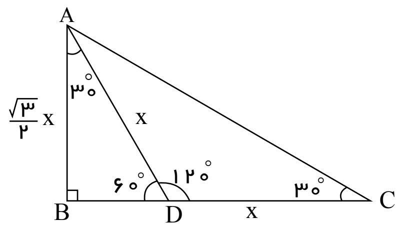
① ۲ ② $۲\sqrt{۳}$

③ ۳ ④ $۴\sqrt{۳}$

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AB \cdot BC \cdot \sin B \\ \sin ۱۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ \end{array}}$$

اگر $AD = DC = x$ باشد، آنگاه داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{ABD}}: ۹۰^\circ + ۳۰^\circ + ۲\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\alpha = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$

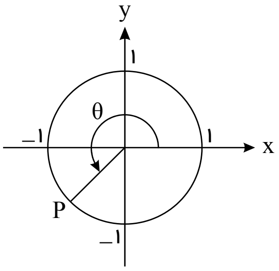
$$S_{\overset{\triangle}{ABD}}: \cos ۳۰^\circ = \frac{AB}{x} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{۳}}{۲} x$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABD}} = \frac{۱}{۲} AD \cdot AB \cdot \sin A = \frac{۱}{۲} \times x \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} x \times \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳} x^۲}{۸}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ADC}} = \frac{۱}{۲} AD \cdot DC \cdot \sin ۱۲۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times x \times x \times \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۴} x^۲$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADC}}}{S_{\overset{\triangle}{ABD}}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴} x^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۸} x^۲} = ۲$$

۲۱ - در شکل زیر، اگر $\cos\theta = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sqrt{۳}\tan\theta - ۴\sin\theta}{\cot\theta}$ کدام است؟



(۱) $۲\sqrt{۳}$

(۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

(۳) $۳\sqrt{۳}$

(۴) $\sqrt{۳}$

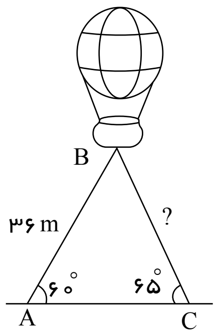
پاسخ: گزینه ۴

$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\theta \text{ ربع سوم}} \sin\theta = -\sqrt{۱ - (\frac{-\sqrt{۳}}{۲})^۲} = -\sqrt{۱ - \frac{۳}{۴}} = -\sqrt{\frac{۱}{۴}} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \sqrt{۳}$$

$$A = \frac{\sqrt{۳}\tan\theta - ۴\sin\theta}{\cot\theta} = \frac{\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} - ۴ \times (-\frac{۱}{۲})}{\sqrt{۳}} = \frac{۱ + ۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۳}{\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

۲۲ - یک بالن مطابق شکل زیر با دو طناب به زمین بسته شده است. طول طناب اول ۳۶ متر است. طول طناب دوم چقدر است؟ ($\sin ۶۵^\circ \simeq ۰/۹$)



(۱) $\frac{۴۰\sqrt{۳}}{۳}$

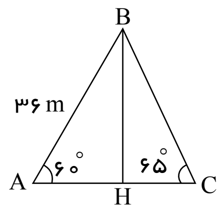
(۲) $۲۰\sqrt{۳}$

(۳) $۱۸\sqrt{۳}$

(۴) $\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}}$

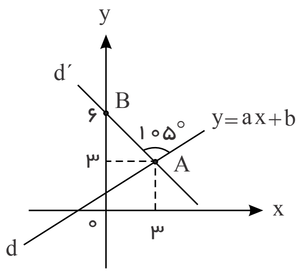
با رسم ارتفاع BH داریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۳۶} \Rightarrow BH = ۱۸\sqrt{۳}$$

$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow ۰/۹ = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{۰/۹} = ۱۸\sqrt{۳} \times \frac{۱۰}{۹} = ۲۰\sqrt{۳}$$

۲۳ - در شکل مقابل مقدار $b(a+۱)$ کدام است؟



(۱) -۶

(۲) $\frac{۱۵}{۴}$

(۳) ۲

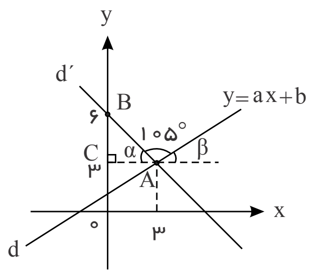
(۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینه ۳

می‌دانیم:

شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد برابر است با $m = \tan\alpha$
معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ b برابر است با $y = mx + b$

مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\tan\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{۳}{۳}=۱\xrightarrow{\alpha\ \text{حاده است}}\alpha=۴۵^\circ$$

زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور xها می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha+۱۰۵^\circ+\beta=۱۸۰^\circ\xrightarrow{\alpha=۴۵^\circ}\beta=۳۰^\circ$$

در اینصورت شیب خط d برابر است با:

$$m_d=\tan\beta=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

خط d از نقطهٔ $(۳,۳)$ عبور می‌کند. پس:

$$۳=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۳+b\Rightarrow ۳-\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow b(a+۱)=(۳-\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۱)=۲$$

۲۴ - معادله‌ی خطی که با جهت مثبت محور xها زاویه‌ی ۶۰° می‌سازد و عرض از مبدأ آن ۲ است، کدام است؟

① $y=۲-\sqrt{۳}x$ ② $y-\sqrt{۳}x=۲$ ③ $y+\sqrt{۳}x=۳$ ④ $y=۳+\sqrt{۳}x$

پاسخ: **گزینه ۲**

شیب خطی که باجهت مثبت محور x ها زاویه‌ی θ بسازد برابر $\tan\theta$ است
معادله‌ی خطی که با شیب m از نقطه $\begin{vmatrix}x_۰\\y_۰\end{vmatrix}$ بگذرد،عبارتست از $y-y_۰=m(x-x_۰)$

شیب خط $=\tan ۶۰^\circ=\sqrt{۳}$

عرض از مبدأ ۲ است. یعنی خط از نقطه‌ی $\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix}$ می گذرد.

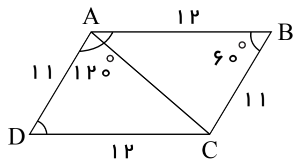
معادله‌ی خط: $y-۲=\sqrt{۳}(x-۰)$

$$y=\sqrt{۳}x+۲\Rightarrow y-\sqrt{۳}x=۲$$

۲۵ - اضلاع متوازی‌الاضلاع به طول ۱۱ و ۱۲ واحد است. در صورتی که زاویهٔ بین این دو ضلع ۱۲۰° باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کدام است؟

① $۲۲\sqrt{۳}$ ② $۶۶\sqrt{۳}$ ③ $۲۲\sqrt{۲}$ ④ $۶۶\sqrt{۲}$

پاسخ: **گزینه ۲** زاویهٔ حادهٔ این متوازی‌الاضلاع برابر با $۶۰^\circ=۱۲۰^\circ-۱۸۰^\circ$ است.



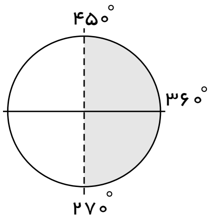
$$S_{ABCD}=۲S_{\overset{\triangle}{ABC}}$$

$$S_{ABCD}=۲\times\frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times\sin ۶۰^\circ=۱۲\times ۱۱\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶۶\sqrt{۳}$$

۲۶ - اگر $۲۷۰^\circ<\alpha<۴۵۰^\circ$ باشد و $\cos\alpha=\frac{-۲m+۳}{۲}$ آن‌گاه حدود m کدام است؟

① $\frac{۱}{۲}<m<\frac{۳}{۲}$ ② $\frac{۱}{۲}\le m<\frac{۳}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۲}\le m\le\frac{۵}{۲}$ ④ $\frac{۳}{۲}<m\le\frac{۵}{۲}$

پاسخ: گزینه ۲



$$۰ < \cos\alpha \le ۱ \Rightarrow ۰ < \frac{-۲m+۳}{۲} \le ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰ < -۲m+۳ \le ۲ \xrightarrow{-۳} -۳ < -۲m \le -۱ \xrightarrow{\div(-۲)} \frac{۱}{۲} \le m < \frac{۳}{۲}$$

۲۷- اگر $\sin ۲\alpha > ۰$ و $\sin\alpha\tan\alpha > ۰$ باشد، آن گاه انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی است؟ $(۰^\circ < \alpha < ۳۶۰^\circ)$

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\sin\alpha > ۰ \Rightarrow ۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ}$

$$\sin ۲\alpha > ۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ < ۲\alpha < ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \quad (I)$$

$$\sin\alpha\tan\alpha > ۰ \Rightarrow \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \cos\alpha > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha \ \text{ربع اول} \\ \alpha \ \text{ربع چهارم} \end{cases} \quad (II)$$

$(I) \cap (II) : ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ ربع اول α

۲۸- حاصل عبارت تعریف شدهٔ $(\cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha)(۱+\tan^۲\alpha)+\tan^۲\alpha$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)\ ,\ ۱+\tan^۲\theta = \frac{۱}{\cot^۲\theta}\ ,\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

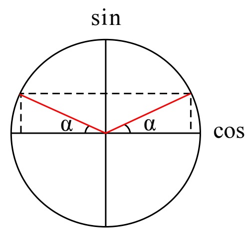
$$(\cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha)(۱+\tan^۲\alpha)+\tan^۲\alpha = (\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha)\underbrace{(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha)}_{۱}(\frac{۱}{\cos^۲\alpha}) + \tan^۲\alpha$$

$$= \frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} - \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} + \tan^۲\alpha = ۱ - \tan^۲\alpha + \tan^۲\alpha = ۱$$

۲۹- مقدار $\dfrac{۲\sin ۱۲۰ - ۲\cos ۱۸۰}{۲\cos ۱۵۰ + ۲\tan ۱۳۵}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ: گزینه ۳ با توجه به دایره مثلثاتی : $\sin\alpha = \sin(۱۸۰-\alpha)$ و $\cos\alpha = -\cos(۱۸۰-\alpha)$.



$$\cos ۱۸۰ = -\cos(۱۸۰-۱۸۰) = -\cos ۰ = -۱ \quad \sin ۱۲۰ = \sin(۱۸۰-۱۲۰) = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰ = -\cos(۱۸۰-۳۰) = -\cos ۳۰ = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵ = \frac{\sin ۱۳۵}{\cos ۱۳۵} = \frac{\sin(۱۸۰-۴۵)}{\cos(۱۸۰-۴۵)} = \frac{\sin ۴۵}{-\cos ۴۵} = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\frac{۲\sin ۱۲۰ - ۲\cos ۱۸۰}{۲\cos ۱۵۰ + ۲\tan ۱۳۵} = \frac{\sqrt{۳}+۲}{-\sqrt{۳}-۲} = \frac{\sqrt{۳}+۲}{-(\sqrt{۳}+۲)} = -۱$$

۳۰- حاصل عبارت $\dfrac{۱}{۱+\tan\theta} \times \dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta} + \tan^۲\theta$ کدام است؟

۱) $\sin\theta$ ۲) $\frac{۱}{\sin^۲\theta}$ ۳) $\cos\theta$ ۴) $\frac{۱}{\cos^۲\theta}$

پاسخ: گزینه ۴ $\boxed{۱+\tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}}$

$$\tan^۲\theta + \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{۱+\tan\theta} = \tan^۲\theta + \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{۱+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \tan^۲\theta + \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos+\sin\theta}{\cos\theta}} = \tan^۲\theta + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ مساحت هر چهارضلعی از نصف حاصل‌ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بینشان به‌دست می‌آید.

$$S=\frac{۱}{۲}(۱۲)(۸\sqrt{۳})(\sin ۶۰^\circ)=(۴۸\sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=۲۴\times ۳=۷۲$$

۲ - گزینه ۱

$$\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-(\tan x+\cot x)^۲=$$

$$\frac{\sin^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}+\frac{\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^۲=$$

$$\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}-(\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}+۲\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{\cos x}{\sin x})$$

$$=\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}-\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}-\frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x}-۲=-۲$$

۳ - گزینه ۳

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\\ ۱+\cot^۲\alpha=\dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}\end{array}}$$

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲=۱\Rightarrow\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}\\ \cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}\end{cases}$$

چون $\cos\alpha$ در مسئله بصورت یک رادیکال داده شده و مثبت است، مقدار مثبت را می‌پذیریم:

$$\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^۲\alpha}=\sqrt{۱-m^۲}\xrightarrow{(\ )^۲}۱-\sin^۲\alpha=۱-m^۲\Rightarrow\sin^۲\alpha=m^۲$$

از طرفی: $۱+\cot^۲\alpha=\dfrac{۱}{\sin^۲\alpha}\Rightarrow ۱+\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}-۱}\right)^۲=\dfrac{۱}{m^۲}$

$$\Rightarrow ۱+\frac{m}{n}-۱=\frac{۱}{m^۲}\Rightarrow\frac{m}{n}=\frac{۱}{m^۲}\Rightarrow m^۳=n$$

۴ - گزینه ۳ $A=\dfrac{\sqrt{۳}-۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^۲-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+۱}=\dfrac{\sqrt{۳}-\sqrt{۳}+۱}{\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+۱}=\dfrac{۱}{\frac{۴-۳+۱۲}{۱۲}}=\dfrac{۱}{\frac{۱۳}{۱۲}}=\dfrac{۱۲}{۱۳}$

$$A=\frac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow\frac{۱۳A}{۲}=\frac{۱۳}{۲}\times\frac{۱۲}{۱۳}=۶$$

۵ - گزینه ۴

$$-۱\le\sin x\le ۱\to -۵\le ۵\sin x\le ۵$$
$$\xrightarrow{-۳}-۸\le ۵\sin x-۳\le ۲\to|۵\sin x-۳|\le ۸\Rightarrow Max=۸$$

۶ - گزینه ۳ $\cos C$ را دو مثلث $O\overset{\triangle}{B}C$ و $O\overset{\triangle}{H}C$ می‌نویسیم:

$$O\overset{\triangle}{B}C:\cos C=\frac{OC}{BC}$$
$$O\overset{\triangle}{H}C:\cos C=\frac{CH}{OC}$$
$$\cos C=\frac{CH}{OC}=\frac{OC}{BC}\Rightarrow OC^۲=BC\cdot CH$$
$$OC^۲=۳\times\sqrt{۳}=۳\sqrt{۳}$$

۱ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{۱+\cot^۲\theta=\dfrac{۱}{\sin^۲\theta}}$

$$A=\sin^۲\theta-\cos^۲\theta+\frac{۱}{۱+\cot^۲\theta}=\sin^۲\theta-\cos^۲\theta+\sin^۲\theta=۲\sin^۲\theta-\cos^۲\theta$$

$$= 2\sin^2\theta - (1-\sin^2\theta) = 2\sin^2\theta - 1 + \sin^2\theta = 3\sin^2\theta - 1$$

$$\xlongequal{\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}} 3\times\frac{2}{16} - 1 = \frac{6}{16} - 1 = \frac{-10}{16} = \frac{-5}{8}$$

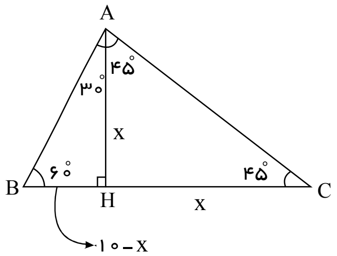
۸ - گزینه ۳

می‌دانیم:در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} \quad , \quad \sin\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}$$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و CH را x می‌نامیم؛ واضح است که طول BH برابر با $10 - x$ خواهد بود.

داریم:



$$AH = CH = x$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10-x}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+3}{3} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{30}{3+\sqrt{3}} = 5(3-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow AC = \frac{CH}{\sin 45^\circ} = \frac{5(3-\sqrt{3})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 5(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 5(\sqrt{18}-\sqrt{6}) = 5\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$$

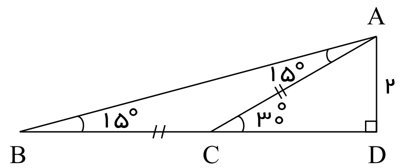
۹ - گزینه ۲

$$\overset{\triangle}{ADC} : \sin 30^\circ = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\overset{\triangle}{ADC} : C\widehat{A}D = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : \widehat{B} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - (60^\circ + 15^\circ) = 15^\circ$$

پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است و شکل به صورت زیر خواهد بود:



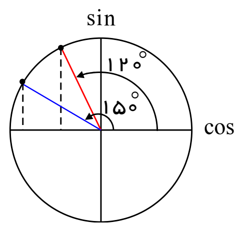
$$\Rightarrow AC = BC = 4$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \times AD = \frac{1}{2}\times 4 \times 2 = 4$$

۱۰ - گزینه ۱

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2}$$

۱۱ - گزینه ۳



$$120^\circ \le \alpha \le 150^\circ$$

$$\cos 150 \le \cos\alpha \le \cos 120$$

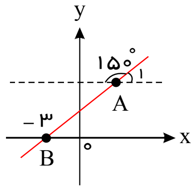
$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \le \cos\alpha \le \frac{-1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \le 2m - 1 \le \frac{-1}{2}$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{2-\sqrt{3}}{2} \le 2m \le \frac{1}{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{2-\sqrt{3}}{4} \le m \le \frac{1}{4}$$

۱۲ - گزینه ۳ با توجه به شکل داریم:

مثلثات



$$۱۵۰^\circ + \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۵۰^\circ = ۳۰^\circ$$

$$\text{شیب خط} = m = \tan \hat{A}_۱ = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow$$

$$y - y_B = m(x - x_B) \Rightarrow y - ۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}(x - (-۳))$$

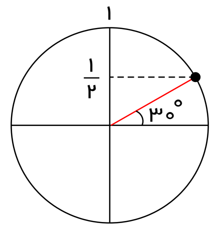
$$\begin{cases} \frac{\sqrt{۳}}{۳}x - y + \sqrt{۳} = ۰ \\ ax - \sqrt{۳}y + c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \sqrt{۳}y + ۳ = ۰ \\ ax - \sqrt{۳}y + c = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۱ \,,\, c = ۳ \Rightarrow a.c = ۳$$

۱۳ - گزینه ۳

برای هر زاویهٔ α: $-۱ \leq \sin\alpha \leq ۱$ یعنی حداکثر سینوس آن ۱ و حداقل آن -۱ است.

وقتی α دربازهٔ $(۳۰^\circ, ۹۰^\circ]$ است، تغییرات آن محدودتر می‌شود. دایره را ببینید.



$$۳۰^\circ < \alpha \leq ۹۰ \xrightarrow{\sin(\ )} \frac{۱}{۲} < \sin\alpha \leq ۱$$

$$\xrightarrow{\sin\alpha = \frac{۲m-۱}{۴}} \frac{۱}{۲} < \frac{۲m-۱}{۴} \leq ۱ \xrightarrow{\times ۴} ۲ < ۲m - ۱ \leq ۴$$

$$\xrightarrow{+۱} ۳ < ۲m \leq ۵ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۳}{۲} < m \leq \frac{۵}{۲}$$

۱۴ - گزینه ۳

برای هر زاویه‌ی x داریم: $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$

$$A = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ - ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha + ۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

$$\Rightarrow A = (\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha)^۲ = ۱^۲ = ۱$$

۱۵ - گزینه ۴ در دایرهٔ مثلثاتی شعاع $r = ۱$ است و لذا مجموع مجذور طول و عرض هر نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی برابر یک می‌شود، یعنی $x^۲ + y^۲ = ۱$ در گزینهٔ «۱» و «۳» این حالت برقرار نیست پس یکی از گزینه‌های «۲» یا «۴» جواب است. از طرفی در دایرهٔ مثلثاتی اگر نقطهٔ (x_P و y_P) مختصات انتهای کمان مربوط به زاویهٔ α باشد، آن‌گاه $\tan\alpha = \frac{y_P}{x_P}$ است. پس:

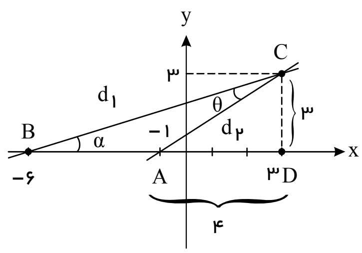
$$\text{گزینهٔ «۲»}: (\frac{۱}{۵}, \frac{۲\sqrt{۶}}{۵}) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}}{\frac{۱}{۵}} = ۲\sqrt{۶} \ \text{غ.ق.غ}$$

$$\text{گزینهٔ «۴»}: (\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}, \frac{۱}{۵}) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y_P}{x_P} = \frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۶}}{۱۲} \checkmark$$

۱۶ - گزینه ۱ می دانیم: $\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$, $\cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $\cot ۴۵^\circ = ۱$

$$A = \frac{۱ + (\sqrt{۳})^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۱ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲} = \frac{۱ + ۳ + \frac{۳}{۴}}{۱ + \frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۴+۱۲+۳}{۴}}{\frac{۴+۳}{۴}} = \frac{۱۹}{۷}$$

۱۷ - گزینه ۲



$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = ۱۶ + ۹ \Rightarrow AC^۲ = ۲۵ \Rightarrow AC = ۵$$

$$AB = |-۶ - (-۱)| = ۵$$

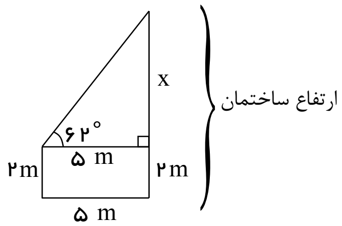
$AB = AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \theta = \alpha \Rightarrow \tan\theta = \tan\alpha$$

شیب خط $d_۱$ برابر با $\tan\alpha$ است، پس $\tan\theta$ نیز برابر با شیب خط $d_۱$ است.

۱۸ ـ گزینه ۲

شکل هندسی این مسئله به‌صورت روبه رو است:



اگر x را محاسبه کنیم، ارتفاع ساختمان به‌صورت $x+2$ متر به‌دست خواهد آمد؛ از تانژانت 62° که در مسئله داده شده شروع می‌کنیم:

$$\tan 62^\circ \simeq 2 = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \frac{x}{5} = 2 \Rightarrow x = 2 \times 5 = 10$$

$$\text{ارتفاع ساختمان} = x + 2 = 10 + 2 = 12 \ \text{متر}$$

۱۹ ـ گزینه ۱

$$\boxed{\alpha + \beta = 90 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta}$$

می‌دانیم در ضرب خاصیت جابجایی وجود دارد؛

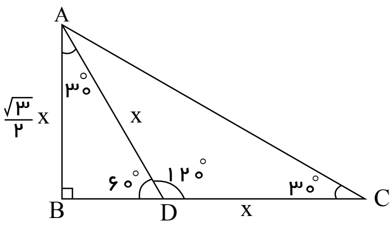
پس عبارت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\sin 1}{\cos 89} \times \dfrac{\sin 2}{\cos 88} \times \cdots \times \dfrac{\sin 89}{\cos 1} \\ \sin 1 = \cos 89 \Rightarrow \dfrac{\sin 1}{\cos 89} = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$$

۲۰ ـ گزینه ۱ می‌دانیم:

$$\boxed{\begin{matrix} S_{\underset{ABC}{\triangle}} = \dfrac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B \\ \sin 120^\circ = \sin 60^\circ \end{matrix}}$$

اگر $AD = DC = x$ باشد، آنگاه داریم:



$$S_{\underset{ABD}{\triangle}} : \ 90^\circ + 30^\circ + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$S_{\underset{ABD}{\triangle}} : \ \cos 30^\circ = \frac{AB}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$S_{\underset{ABD}{\triangle}} = \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2}x \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}x^2}{8}$$

$$S_{\underset{ADC}{\triangle}} = \frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\frac{S_{\underset{ADC}{\triangle}}}{S_{\underset{ABD}{\triangle}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{\frac{\sqrt{3}}{8}x^2} = 2$$

۲۱ ـ گزینه ۴

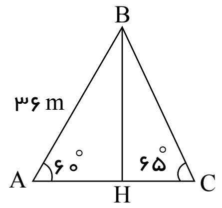
$$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{ربع سوم } \theta} \sin\theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \sqrt{3}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}\tan\theta - 4\sin\theta}{\cot\theta} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}} = \frac{1+2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

۲۲ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\boxed{\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}}$

با رسم ارتفاع BH داریم:



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۳۶} \Rightarrow BH = ۱۸\sqrt{۳}$$

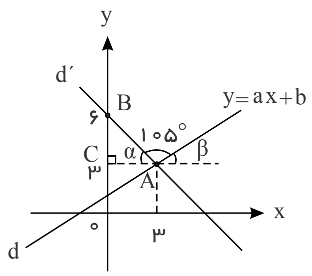
$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow ۰{,}۹ = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۸\sqrt{۳}}{۰{,}۹} = ۱۸\sqrt{۳} \times \frac{۱۰}{۹} = ۲۰\sqrt{۳}$$

۲۳ - گزینه ۳

می‌دانیم:

شیب خطی که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α بسازد برابر است با $m = \tan\alpha$
معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ b برابر است با $y = mx + b$

مطابق شکل زیر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۳} = ۱ \xrightarrow{\text{حاده است } \alpha} \alpha = ۴۵^\circ$$

زاویه‌ای که خط d با جهت مثبت محور xها می‌سازد را به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha + ۱۰۵^\circ + \beta = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\alpha = ۴۵^\circ} \beta = ۳۰^\circ$$

در اینصورت شیب خط d برابر است با:

$$m_d = \tan\beta = \tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

خط d از نقطهٔ $(۳,۳)$ عبور می‌کند. پس:

$$۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \times ۳ + b \Rightarrow ۳ - \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow b(a+۱) = (۳ - \sqrt{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۱) = ۲$$

۲۴ - گزینه ۲

شیب خطی که باجهت مثبت محور x ها زاویه‌ی θ بسازد برابر $\tan\theta$ است
معادله‌ی خطی که با شیب m از نقطه $\begin{vmatrix} x_۰ \\ y_۰ \end{vmatrix}$ بگذرد، عبارتست از $y - y_۰ = m(x - x_۰)$

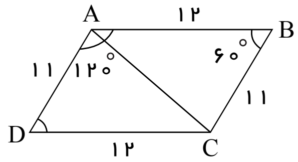
شیب خط $= \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$

عرض از مبدأ ۲ است. یعنی خط از نقطه‌ی $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۲ \end{vmatrix}$ می گذرد.

معادله‌ی خط: $y - ۲ = \sqrt{۳}(x - ۰)$

$$y = \sqrt{۳}x + ۲ \Rightarrow y - \sqrt{۳}x = ۲$$

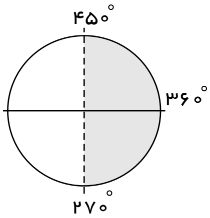
۲۵ - گزینه ۲ زاویهٔ حادهٔ این متوازی‌الاضلاع برابر با $۱۸۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$ است.



$$S_{ABCD} = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}}$$

$$S_{ABCD} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin ۶۰^\circ = ۱۲ \times ۱۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶۶\sqrt{۳}$$

۲۶ ـ گزینه ۲



$$۰ < \cos\alpha \leq ۱ \Rightarrow ۰ < \frac{-۲m+۳}{۲} \leq ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۰ < -۲m+۳ \leq ۲ \xrightarrow{-۳} -۳ < -۲m \leq -۱ \xrightarrow{\div(-۲)} \frac{۱}{۲} \leq m < \frac{۳}{۲}$$

۲۷ ـ گزینه ۱ می‌دانیم: $\boxed{\sin\alpha > ۰ \Rightarrow ۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ}$

$$\sin ۲\alpha > ۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ < ۲\alpha < ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ \quad (I)$$

$$\sin\alpha\tan\alpha > ۰ \Rightarrow \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha} > ۰ \Rightarrow \cos\alpha > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha \ \text{ربع اول} \\ \alpha \ \text{ربع چهارم} \end{cases} \quad (II)$$

$(I) \cap (II): ۰^\circ < \alpha < ۹۰^\circ$ ربع اول α

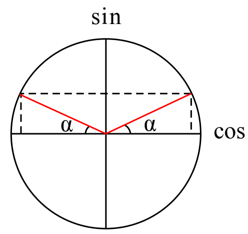
۲۸ ـ گزینه ۲

می‌دانیم: $\boxed{a^۲ - b^۲ = (a-b)(a+b)\,,\ ۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cot^۲\theta}\,,\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$(\cos^۴\alpha - \sin^۴\alpha)(۱+\tan^۲\alpha) + \tan^۲\alpha = (\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha)\underbrace{(\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha)}_{۱}\left(\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\right) + \tan^۲\alpha$$

$$= \frac{\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} - \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} + \tan^۲\alpha = ۱ - \tan^۲\alpha + \tan^۲\alpha = ۱$$

۲۹ ـ گزینه ۳ با توجه به دایره مثلثاتی: $\sin\alpha = \sin(۱۸۰-\alpha)$ و $\cos\alpha = -\cos(۱۸۰-\alpha)$.



$$\cos ۱۸۰ = -\cos(۱۸۰-۱۸۰) = -\cos ۰ = -۱ \quad \sin ۱۲۰ = \sin(۱۸۰-۱۲۰) = \sin ۶۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰ = -\cos(۱۸۰-۳۰) = -\cos ۳۰ = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵ = \frac{\sin ۱۳۵}{\cos ۱۳۵} = \frac{\sin(۱۸۰-۴۵)}{\cos(۱۸۰-۴۵)} = \frac{\sin ۴۵}{-\cos ۴۵} = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\frac{۲\sin ۱۲۰ - ۲\cos ۱۸۰}{۲\cos ۱۵۰ + ۲\tan ۱۳۵} = \frac{\sqrt{۳}+۲}{-\sqrt{۳}-۲} = \frac{\sqrt{۳}+۲}{-(\sqrt{۳}+۲)} = -۱$$

۳۰ ـ گزینه ۴ $\boxed{۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}}$

$$\tan^۲\theta + \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{۱+\tan\theta} = \tan^۲\theta + \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{۱+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \tan^۲\theta + \frac{\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos+\sin\theta}{\cos\theta}} = \tan^۲\theta + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۳	۱۱ - ۳	۱۶ - ۱	۲۱ - ۴	۲۶ - ۲
۲ - ۱	۷ - ۲	۱۲ - ۳	۱۷ - ۲	۲۲ - ۲	۲۷ - ۱
۳ - ۳	۸ - ۳	۱۳ - ۳	۱۸ - ۲	۲۳ - ۳	۲۸ - ۲
۴ - ۳	۹ - ۲	۱۴ - ۳	۱۹ - ۱	۲۴ - ۲	۲۹ - ۳
۵ - ۴	۱۰ - ۱	۱۵ - ۴	۲۰ - ۱	۲۵ - ۲	۳۰ - ۴